

応用数理概論 (2) ・ 応用数理特別講義 II

レポート課題

2025 年 1 月 21 日配布

提出期限：2025 年 2 月 4 日 (火) 17:00

注意

- 以下の 6 問のうち, 2 問以上解答すること.
- 8 号館 6 階東側エレベーターホールのレポート入れに提出すること.
- レポートの最初に科目名・学修番号・氏名を記入すること.
- A4 レポート用紙を使用し, レポートが複数枚にわたるときは, 左上をホッチキス等で綴じること.
- 答えだけでなく, どのような計算・議論をしたか分かるように詳しく書くこと.

問題

以下の問題では, 体  $K$  の代数閉包を  $\bar{K}$  で表す. また, 以下の 3 問では, 楕円曲線の無限遠点 (単位元) を  $O$  で表す.

1.  $E: y^2 = x^3 + x + 2$  を  $\mathbb{F}_{19}$  上定義された楕円曲線として,  $P = (-2, 7), Q = (8, 3)$  とする. このとき,  $P + Q, 2P, 3Q, 2P - Q$  を求めよ.
2.  $E: y^2 = x^3 + 2$  を  $\mathbb{F}_{13}$  上定義された楕円曲線とする.  $\#E(\mathbb{F}_{13})$  を求めよ.
3.  $K$  を標数が 2 でない体,  $E: y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$  を  $K$  上定義された楕円曲線とする.  $E$  上の 4 点  $P_i = (x_i, y_i) \in E(K) \setminus \{O\}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) が  $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = O$  を満たすとき,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つことを示せ.

以下の 3 問では, 超楕円曲線の無限遠点を  $\infty$  で表す. その他, 講義で述べた定義を用いるものとする. (特に, 被約因子の定義は代数幾何学における通常との定義とは異なるので注意すること.)

4.  $C: y^2 = x^5 + x + 8$  を  $\mathbb{F}_{17}$  上定義された超楕円曲線とする.

$$D_1 = \text{div}(x^2 + 13x, 4x + 5), \quad D_2 = \text{div}(x^2 + 9x + 12, 5x + 2)$$

とする.  $D_3 \sim D_1 + D_2$  となる被約因子  $D_3$  を求め,  $D_3 = \text{div}(U(x), V(x))$  の形で表せ.

5.  $C: y^2 = x^5 - x^2 - 1$  を  $\mathbb{F}_3$  上定義された超楕円曲線として,  $J$  を  $C$  のヤコビアンとする. このとき,  $\#C(\mathbb{F}_3), \#J(\mathbb{F}_3)$  を求めよ.
6.  $K$  を標数が 2 でない体,  $C: y^2 = f(x)$  を  $K$  上定義された種数  $g$  の超楕円曲線とする. ただし,  $f(x)$  は  $K$  係数モノック  $2g + 1$  次多項式であり,  $\bar{K}$  で重根を持たないとする.  $\bar{K}[C] = \bar{K}[x, y]/(y^2 - f(x))$  を  $C$  の座標環とする.  $P = (a, b) \in C(\bar{K}), b \neq 0, V(x) \in \bar{K}[x]$  として,  $b = V(a)$  であるとする.  $V(x) - y$  のノルム  $N(V(x) - y) = V(x)^2 - f(x)$  が  $\bar{K}[x]$  において  $x - a$  でちょうど  $r$  回割り切れるとする. このとき,  $\text{ord}_P(V(x) - y) = r$  であることを示せ.