

離散数学入門 c 小テスト

2012年6月12日

注意

- 答案用紙にコース・学修番号・氏名を書くこと。
- 答案用紙の裏面を用いてもよい。

問題

1. $U = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 300\}$ を全体集合とする。 U の部分集合 A_1, A_2, A_3 を

$$A_1 = \{n \mid n \in U, n = 3k, k \in \mathbb{N}\},$$

$$A_2 = \{n \mid n \in U, n = 5k, k \in \mathbb{N}\},$$

$$A_3 = \{n \mid n \in U, n = 7k, k \in \mathbb{N}\}$$

で定義する。次の集合の要素の個数を求めよ。

$$(a) n(A_1) \quad (b) n(A_2 \cap A_3) \quad (c) n(\overline{A_2}) \quad (d) n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

2. \mathbb{Z} から \mathbb{Z} への写像 f_1, f_2, f_3, f_4 を以下の式で定義する。

$$f_1(x) = x^2 + 1,$$

$$f_2(x) = -x + 3,$$

$$f_3(x) = 3x + 2,$$

$$f_4(x) = \left(\frac{x}{3} \text{に最も近い整数}\right).$$

このとき、 f_1, f_2, f_3, f_4 に当てはまるものを次の4つの中からそれぞれ選べ（答えだけでよい）。

- (a) 全射でも単射でもない。
 - (b) 全射であるが、単射ではない。
 - (c) 単射であるが、全射ではない。
 - (d) 全単射である。
3. 4次対称群 $(S_4; \circ)$ を考える。 S_4 の要素

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して、 $\sigma \circ \varphi, \varphi \circ \sigma, \sigma^{-1}, \varphi^{-1}$ を求め、上のように表せ。

4. 次の場合の数を求めよ。

- (a) 単語 PARALLEL のアルファベットを並び替えて得られる単語は何通りあるか。
 - (b) トランプのスイート（マークの種類）はスペード、ハート、ダイヤ、クラブの4種類である。それぞれのスイートに A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K の13枚があり、合計52枚のトランプがある。ここからトランプを12枚引いたとき、スイートの組み合わせは何通りあるか。
5. (a) $(R; +, \cdot)$ を単位的可換環（単位元を持つ可換環）とする。この環の零元を0、単位元を1として、 $0 \neq 1$ であるとする。 $(R; +, \cdot)$ が体であることの定義を述べよ。
- (b) (a) で述べた定義に従って、可換環 $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +, \cdot)$ が体であることを示せ。ここで、 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ は同値関係「 $\equiv \pmod{5}$ 」による \mathbb{Z} の商集合であり、 $\mathbb{Z}/(5), \mathbb{Z}_5$ とも表される。